Chambre de Commerce et d'industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

MATHÉMATIQUES
2ème épreuve
Coefficient 3

Lundi 25 Mai 1981 de 8 heures à 12 heures

Corrigé

Problème I

1. Au bout d'un nombre pair de sauts le point lumineux ne peut se trouver qu'en P_{-2}, P_0 ou P_2 et au bout d'un nombre impair de sauts il ne peut se trouver qu'en P_{-1}, P_1 ou P_2.

(a) Soit A_n l'événement « de $t = 0$ à $t = n$ le point lumineux ne s'est positionné ni en P_{-2} ni en P_2 ».
Soit D_n l'événement « le n-ième saut est un saut vers la droite. »
Soit G_n l'événement « le n-ième saut est un saut vers la gauche. »
Si A_{2k} est réalisé alors à l'instant $t = 2k$ le point lumineux est en P_0 est donc A_{2k+1} est réalisé. D'où $p(A_{2k+1}) = p(A_{2k})$.
D'autre part, on a :

$$A_{2k} = (A_{2k-2} \cap G_{2k-1} \cap G_{2k}) \cup (A_{2k-2} \cap D_{2k-1} \cap G_{2k})$$

et donc

$$p(A_{2k}) = p(A_{2k-2}) \times \frac{1}{4} + p(A_{2k-2}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}p(A_{2k-2}).$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, d'où $p(A_{2k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k p(A_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
Donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ p(A_{2k+1}) = p(A_{2k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(b) Soit B_n l'événement « De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$, $n > 0$, le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et il se positionnera en P_2 pour la première fois à l'instant $t = n$ ».
On a $p(B_{2k+1}) = 0$
et

$$B_{2k} = A_{2k-2} \cap D_{2k-1} \cap D_{2k}$$

et donc

$$p(B_{2k}) = \frac{1}{4}p(A_{2k-2}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

(c) Soit C l'événement « le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} et se positionne en P_2 pour la première fois ».
On a $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ et donc $p(C) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_{2n}) = \sum_{n=}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}$.

2. (a) À l'instant $t = 0$ le point lumineux se trouve en P_0, donc $E(X_0) = V(X_0) = 1$. X_1 ne peut prendre que les valeurs 1 et -1 avec $p(X_1 = -1) = p(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, donc $E(X_1) = 0$ et $V(X_1) = 1$.
Le tableau suivant donne les lois de probabilités des variables X_2, X_3 et X_4.

k	-1	-1	0	1	2
$p(X_2 = k)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$
$p(X_3 = k$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$p(X_4 = k)$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$

D'où

k	2	3	4
$E(X_k)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$V(X_k)$	2	$\frac{27}{16}$	$\frac{39}{16}$

(b) Pour calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4) dressons le tableau de loi du couple (X_3, X_4) en utilisant la formule :

$$p(X_3 = i, X_4 = j) = p(X_4 = j/X_3 = i)p(X_3 = i)$$

X_3 \ X_4	-2	0	2
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{4}$

$\mathrm{Cov}(X_3, X_4) = E(X_3X_4) - E(X_3)E(X_4))$ et $E(X_3X_4) = \sum_{-2 \leq i,j \leq 2} ijp(X_3 = i, X_4 = j) = \frac{7}{4}$. Donc $\mathrm{Cov}(X_3, X_4) = \frac{27}{16}$. D'où

$$\rho(X_3, X_4) = \frac{\mathrm{Cov}(X_3, x_4)}{\sqrt{V(X_3)}\sqrt{V(X_4)}} = \sqrt{\frac{27}{39}}.$$

3. (a) On a $p(X_{n+1} = j) = \sum_{i=-2}^{2} p(X_{n+1} = j/X_n = i)p(X_n = i), \;\; j \in [\![-2, 2]\!]$. D'où le relations suivantes :

$$\begin{aligned}
p(X_{n+1} = -2) &= \frac{1}{2}p(X_n = -1) && (1)\\
p(X_{n+1} = -1) &= p(X_n = -2) + \frac{1}{2}p(X_n = 0) && (2)\\
p(X_{n+1} = 0) &= \frac{1}{2}p(X_n = -1) + \frac{1}{2}p(X_n = 1) && (3)\\
p(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{2}p(X_n = 0) && (4)\\
p(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{2}p(X_n = 1) + p(X_n = 2) && (5)
\end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
p(X_{n+2}=0) &= \frac{1}{2}p(X_{n+1}=-1)+\frac{1}{2}p(X_{n+1}=1)\\
&= \frac{1}{2}\left[p(X_n=-2)+\frac{1}{2}p(X_n=0)\right]+\frac{1}{4}p(X_n=0)\\
&= \frac{1}{2}p(X_n=0)+\frac{1}{2}p(X_n=-2)\\
&= \frac{1}{2}p(X_n=0)+\frac{1}{2}\left[p(X_n=0)-\frac{1}{4}p(X_{n-2}=0)\right]
\end{aligned}$$

d'où $\forall n \geq 2,\ \ a_{n+2}-a_n+\dfrac{1}{8}a_{n-2}=0$ ou encore $8a_{n+2}-8a_n+a_{n-2}=0$.

(c) Les suites vérifiant $8u_{n+1}-8u_n+u_{n-1}=0$ sont données par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n=\lambda\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n+\mu\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^n,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

(d) Posons $a_{2n}=u_n$ et $a_{2n+1}=0$. Alors $a_{2n}=\lambda\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n+\mu\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^n$ et déterminons λ et μ grâce aux conditions initiales $a_0=1=\lambda+\mu$ et $a_2=\dfrac{1}{2}=\lambda\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)+\mu\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$. On obtient

$$a_{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^n.$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Problème II

1. (a) Soit l'événement B_3 : « choisir chaque année la région 2 durant les 3 premières années. » On a donc

$$B_3=A_2(1)\cap A_2(2)\cap A_2(3).$$

La formule des probabilités composées donne

$$p(B_3)=p\left[A_2(1)\right]\times p\left[A_2(2)/A_2(1)\right]\times p\left[A_2(3)/A_2(1)\cap A_2(2)\right].$$

D'après l'hypothèse 5, $p\left[A_2(3)/A_2(1)\cap A_2(2)\right]=p\left[A_2(3)/A_2(2)\right]$, donc

$$p(B_3)=\alpha_2(1)\times a_{22}^2=0,45\times(0,3)^3=0,0405.$$

De même, $B_n=A_2(1)\cap A_2(2)\cap\ldots\cap A_2(n)$, donc toujours d'après la formule des probabilités composées,

$$p(B_n)=p\left[A_2(1)\right]\prod_{i=1}^{n-1}p\left[A_2(i+1)/A_2(i)\right]=0,45\times(0,3)^{n-1}.$$

(b) Le système $\{A_1(1),A_2(1),A_3(1)\}$ étant complet d'après les hypothèses 1 et 2, donc d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
p\left[A_2(1)/A_1(2)\right] &= \frac{p\left[A_1(2)/A_2(1)\right]\times p\left[A_2(1)\right]}{\sum_{i=1}^{3}p\left[A_1(2)/A_i(1)\right]\times p\left[A_i(1)\right]}\\
&= \frac{0,45\times 0,1}{0,2\times 0,3+0,45\times 0,1+0,35\times 0,6}\\
&= \frac{9}{63}\sim 0,143.
\end{aligned}$$

(c) Soit C l'événement : « l'individu change de région entre la première et la deuxième année. » On a :

$$\overline{C} = [A_1(1) \cap A_1(2)] \cup [A_2(1) \cap A_2(2)] \cup [A_3(1) \cap A_3(2)] .$$

$$\begin{aligned} 1 - p(C) &= p[A_1(1)/A_1(2)] \times p[A_1(2)] + p[A_2(1)/A_2(2)] \times p(A_2(2)] + p[A_3(1)/A_3(2)] \times p[A_3(2)] \\ &= \alpha_1(1)a_{11} + \alpha_1(1)a_{11} + \alpha_1(1)a_{11} = 0,265 \end{aligned}$$

Soit $p(C) = 0,735$.

2. (a) Le système $\{A_1(n), A_2(n), A_3(n)\}$ étant complet d'après les hypothèses 1 et 2, donc d'après la formule de Bayes, on a pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$:

$$p[A_i(n+1)] = \sum_{j=1}^{3} p[A_i(n+1)/A_j(n)] \times p[A_j(n)] .$$

Soit $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\alpha_i(n+1) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_j(n)$ ce qui exprime légalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix} .$$

Soit en réécrivant toutes ces relations aux temps $t = n$, $t = n - 1$ jusqu'à $t = 2$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix} .$$

(b) Calculons :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,2 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ 0,4 & 0 \end{vmatrix} = 0,12. \end{aligned}$$

Soit $\det(M) = 0,12$.

(c) Cherchons le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda - 0,3 & -0,1 & -0,6 \\ -0,5 & \lambda - 0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda - 0,2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ -0,5 & \lambda - 0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda - 0,2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & \lambda - 0,3 & -0,2 \\ -0,2 & -0,6 & \lambda - 0,2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & \lambda + 0,2 & 0,3 \\ -0,2 & -0,4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 0,2 & 0,3 \\ -0,4 & \lambda \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Soit $\det(M) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 0,2\lambda + 0,12)$. Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique, elles sont donc 1, $-0,1 + i\sqrt{0,11}$ et $-0,1 - i\sqrt{0,11}$.

(d) M admet trois valeurs propres distinctes complexes, donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit P la matrice de passage de la base initiale à la base de vecteurs propres. On a donc

$$M = PDP^{-1} \text{ et } M^n = PD^nP^{-1}$$

avec $D = \text{diag}(1, \lambda, \overline{\lambda})$ ($\lambda = -0,1 + i\sqrt{0,11}$). La première colonne de P est un vecteur propre associée à la valeur propre 1. Vérifions que le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ est vecteur propre associé à 1. Calculons :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est bien du type :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix} \text{ et } M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. (a) L'application linéaire $X \mapsto PXP^{-1}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ étant continue (propriété des applications linéaires continues en dimension finie), alors comme $|\lambda| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} M^n = P \lim_{n\to\infty} \text{diag}\left(1, \lambda^n, \overline{\lambda}^n\right) P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \end{pmatrix}.$$

Soit $\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \\ a & a' & a'' \end{pmatrix}$.

(b) Soit $W = UV = (w_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$. Pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{3} w_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} u_{ik}v_{kj} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} v_{kj}u_{ik} = \sum_{k=1}^{3} u_{ik}\left(\sum_{j=1}^{3} v_{kj}\right) = 1.$$

Donc la somme des éléments de chaque colonne de UV est 1.

(c) En utilisant le résultat de la question précédente, on montre par récurrence sur n que la somme des éléments de chaque colonne de M^n est 1.

Posons $M^n = \left(m_{ij}^{(n)}\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ et $L = (l_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \lim_{n\to\infty} M^n$. On a alors, pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$, $\sum_{i=1}^{3} m_{ij}^{(n)} = 1$, donc par passage à la limite on obtient : $\sum_{i=1}^{3} l_{ij} = 1$. Ainsi par unicité de la limite $3a = 3a' = 3a'' = 1$, soit donc $a = a' = a'' = \dfrac{1}{3}$.

(d) Par continuité de l'application linéaire $X \mapsto X \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix} = \left(\lim_{n\to\infty} M^{n-1}\right) \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,45 \\ 0,35 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lim_{n\to\infty} \alpha_1(n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_2(n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_3(n) = \dfrac{1}{3}$.